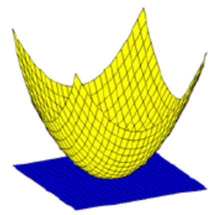
DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA ANALÍTICA



SERIE No. "3" 2010-2

"LA RECTA Y EL PLANO"

1. Sea L la recta cuyas ecuaciones son:

$$L:\begin{cases} y = 3 \\ z = 1 \end{cases}$$

Calcular:
a) La distancia del origen de coordenadas, a la recta L.
b) La distancia entre la recta L y el eje de las cotas.
c) Los ángulos $\alpha, \beta\ y\ \gamma$ que forma la recta L con los ejes coordenados X, Y y Z, respectivamente.

2. Sean $L_1\ y\ L_2$ las rectas cuyas ecuaciones son:

$$L_1: \quad x = 1; \quad \frac{y-1}{a} = \frac{3-3z}{-3}$$

$$L_2: \quad \frac{x}{b} = y = -\frac{4z}{-4}$$

Si dichas rectas son perpendiculares entre sí, y además se intersecan, determinar los valores de "a" y "b".

3. Sean las rectas L y R definidas de la siguiente manera:

L: contiene al origen, está contenida en el plano YZ, y forma un ángulo de $60°$ con el eje Y.
R: es paralela al eje Z y corta al eje X en el punto P de coordenadas (2, 0, 0).

a) Determinar unas ecuaciones paramétricas de las rectas L y R.
b) Indicar si las rectas L y R definen un ángulo entre sí. En caso afirmativo, calcularlo; en caso contrario, justificar su respuesta.

4. Sean las rectas $L_1\ y\ L_2$ cuyas ecuaciones son:

$$L_1 : \bar{p} = (1-t, 0, 1-t)$$

$$L_2 : 1-x = \frac{\frac{3}{2} - \frac{3z}{2}}{-3}; y = 0$$

a) Determinar si $L_1\ y\ L_2$ son paralelas, si se cruzan o si se cortan.
b) En caso de que $L_1\ y\ L_2$ se corten, determinar el punto de intersección; en caso de que se crucen o sean paralelas, calcular la distancia entre ellas.

5. Determinar las coordenadas del punto de intersección entre la recta:

$$L: \begin{cases} \dfrac{x-4}{-4} = \dfrac{z}{8} \\ y = 6 \end{cases}$$

y la recta R que contiene a los puntos (4, 6, 8) y (0, 6, 0).

6. Calcular la distancia entre la recta

$$L: \begin{cases} z = 8 - 2x \\ y = 6 \end{cases}$$

y el eje de las abscisas.

7. Sea la recta R que contiene al punto P(4, -1, 0), que es perpendicular al eje X, y cuyo vector director tiene como ángulos directores $\beta < 90°$ y $\gamma = 126.87°$; y sea la recta L, una de cuyas ecuación es vectoriales es:

$$\overline{p} = (2, y_0, -1) + t(1, -3, c)$$

Determinar los valores de y_0 y *c*, tales que las rectas R y L se intersequen perpendicularmente.

8 Sea la recta L que tiene por ecuaciones:

$$L: -2x - 4 = -2z \quad ; \quad y + 6 = 0$$

Determinar las coordenadas del punto de la recta que está más cerca del origen de coordenadas.

9. Obtener una ecuación vectorial de una recta L que contiene al punto A(– 2, – 4,1), es paralela al plano XZ y forma con el plano $\pi : 4 - 2z = 0$ un ángulo de 60º

10. Determinar unas ecuaciones paramétricas de la recta R, que contiene al punto $A(3, 1, 0)$, y que corta perpendicularmente a la recta L que tiene por ecuaciones:

$$L: \frac{4-2x}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{3-z}{2}$$

11. Sea la recta L_1 la cual contiene al punto $A(2, 2, 3)$ y se interseca con la recta $L_2: \begin{cases} x = 3 \\ z = 2 \end{cases}$ y forman un ángulo de 30°. Determinar las coordenadas del punto de intersección entre ambas rectas.

12. Calcular la distancia entre las rectas L_1 y L_2 de ecuaciones:

$$L_1: \frac{x+2}{-3} = \frac{y-1}{2} = \frac{-(z+4)}{5}$$

13. Sea la viga $\overline{AB}$ que tiene por extremos a los puntos A(1, 2, 3) y B(7, 6, 5). Si desde el punto C(4, 5, 10) cae en forma vertical un objeto, determinar si éste golpea a la viga. En caso afirmativo, determinar el punto de contacto; en caso contrario, calcular a qué distancia de la viga pasará el objeto.
Nota: despreciar el ancho de la viga y el del objeto.

14. Sea la recta L que contiene al punto A(2, 4, 6) y que forma ángulos agudos iguales con los ejes X y Y. Si el ángulo entre la recta L y el eje Z es de $45°$, determinar:

a) El ángulo que forma la recta L con los ejes X y Y;
b) Unas ecuaciones paramétricas de la recta L;
c) El punto en el cual la recta L se interseca con el plano XZ.

15. Sea la recta L_1 que contiene al punto A(4, 0, 4), que interseca a la recta L_2 y forma con ésta un ángulo de $60°$. Si las ecuaciones de la recta L_2 son:

$$2-x=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{2}$$

determinar las coordenadas de los puntos de intersección entre L_1 y L_2 (hay dos soluciones).

16. Sean las rectas:

$$L_1 : \frac{x-1}{2}=-y=\frac{3z-6}{9}$$

$$L_2 : \frac{4-2x}{-4}=1-y=\frac{2z-8}{6}$$

a) Calcular el ángulo que forman L_1 y L_2.
b) Determinar la distancia entre L_1 y L_2.
c) Obtener la ecuación cartesiana del plano definido por L_1 y L_2.

17. Sean las rectas L y R que tienen por ecuaciones:

$$L: \left\{ \frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{4}=\frac{2z+6}{4} \right.$$

$$R: \left\{ \frac{2-x}{3}=\frac{y}{3}=\frac{6-z}{9} \right.$$

a) Si L y R se intersecan, determinar el punto de intersección; en caso contrario calcular la distancia entre dichas rectas.
b) Determinar el punto de intersección de la recta R con el plano XY.

18. Sean los planos:

$$\pi_1 : 6x-3y+z=0$$

$$\pi_2 : 3x+2y-4=0$$

Determinar:
a) La ecuación cartesiana del plano π_3 que contiene al punto A(0, 7, -1) y que es simultáneamente perpendicular a los planos π_1 y π_2;
b) Unas ecuaciones paramétricas de la recta R de intersección del plano π_2 con el plano YZ;
c) El ángulo que forma el plano π_2 con el eje Z.

19. Sean las rectas L y R que tienen por ecuaciones:

$$L:\begin{cases} 4x+6y-12=0 \\ z=0 \end{cases}$$

$$R:\begin{cases} 2x-4z-6=0 \\ y=0 \end{cases}$$

Determinar si las rectas L y R definen un plano. En caso afirmativo, obtener la ecuación cartesiana de dicho plano; en caso contrario, explicar porqué no definen un plano.

20. El punto A(3,3,4) es simétrico del punto B(3,5,6) respecto al plano π. Obtener la ecuación cartesiana del plano π.

21. Determinar la ecuación cartesiana del plano que forman las rectas:

$$M: \bar{p}=(4,0,8)+t(-4,6,0)$$

$$L:\begin{cases} \dfrac{x-4}{-4}=\dfrac{z}{8} \\ y=6 \end{cases}$$

22. Sea la recta L de ecuaciones cartesianas L: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{5z-3}{10}$ Determinar las coordenadas de los dos puntos A y B que pertenecen a la recta L y cuya distancia al punto C$\left(5,-2,\dfrac{8}{5}\right)$ es igual a $3\sqrt{6}$

23. Sea el plano π definido por los puntos A(3, 0, 0), B(0, 3, 0) y C(0, 0, 6).

a) Calcular la distancia entre el punto Q(3, 2, 3) y el plano π.
b) Determinar las coordenadas del punto de intersección entre el plano π y la recta L que contiene al punto (4, 5, 6) y que es normal al plano π.

24. Determinar la ecuación cartesiana del plano π que es perpendicular al plano π_1 cuya ecuación es y = 0, y que contiene a la recta L de ecuaciones:

$$L:\begin{cases} x+2y-z=1 \\ x-z=2 \end{cases}$$

25. Sea el plano π cuya ecuación es $3x-6y+z+6=0$ y sea la recta L que tiene por ecuaciones:

$$\text{L: } x-3=y-3=\frac{3-z}{-3}$$

Determinar, si existe, la intersección entre la recta y el plano.

26. Determinar la ecuación cartesiana del plano que contiene al punto P(2, -1, 4) y que es perpendicular a la recta L que tiene por ecuaciones:

$$L:\begin{cases} 2x-4y-6z+7=0 \\ x+3y-5z-3=0 \end{cases}$$

27. Determinar la ecuación cartesiana del plano que contiene al punto A(1, -2, 3) y al eje X.

28. Determinar las ecuaciones cartesianas de los tres planos que contienen a la recta L de ecuaciones

$$L: \frac{8-2x}{6} = y = \frac{16-z}{7}$$

y que son perpendiculares a los tres planos coordenados.

29. Determinar la ecuación cartesiana del plano π_1 que contiene al punto A(-1, 2, 1) y a la recta L de intersección del plano π_2 cuya ecuación es $5x-2y+4z-4=0$ con el plano YZ.

30. Sean la recta L y el plano π representados por las ecuaciones:

$$\text{L:}\begin{cases} x=y \\ x=z \end{cases} \qquad \pi: \bar{p} = s\,i + t\,j$$

a) Obtener las coordenadas del punto F, intersección de L con π.
b) Calcular el ángulo que forman L y π.
c) Determinar, unas ecuaciones cartesianas en forma general de la recta R que resulta de la intersección del plano π con el plano cartesiano YZ.

31. Sean las rectas L_1 y L_2 que se cruzan en el espacio, sin cortarse, y cuyas ecuaciones son

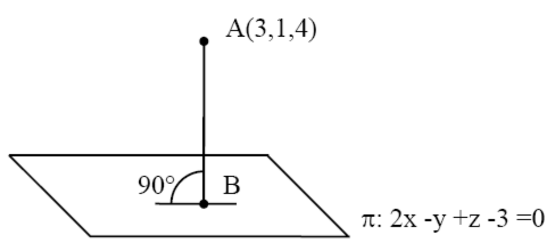
$$L_1: \{P_o(0,0,0);\ \bar{u} = (-1,-4,0)$$

$$L_2: \begin{cases} x=-2+t \\ y=1-t \\ z=1+t \end{cases}$$

Determinar la ecuación cartesiana del plano π que contiene a L_1 y a L_3, siendo ésta última ortogonal tanto a L_1 como a L_2.

32. Determinar una ecuación cartesiana y una ecuación vectorial del plano π que contiene a las rectas L: $x-1=\dfrac{2y+2}{4}=\dfrac{1-z}{-3}$ y R: $\begin{cases} x=1-2t \\ y=2-4t \\ z=4-6t \end{cases}$.

33. Determinar las coordenadas del punto B que se muestra en la siguiente figura.



34. Determinar la ecuación cartesiana del plano que es bisector del ángulo que forman las rectas L_1 y L_2 de ecuaciones:

$$L_1:\ x = y = z$$

$$L_2:\ x = -y = z$$

35. Sea la recta L, unas de cuyas ecuaciones son:

$$L: \frac{-x}{5} = \frac{10-2z}{-10};\ y = 0$$

y sea π el plano cuya ecuación es:

$$\pi: 2x - 3y + 2z - 10 = 0$$

a) Calcular el ángulo que forma L con π.
b) Determinar la intersección de L con π, si ésta existe.

36. Sea la recta L que contiene al punto A(7, 0, 0) y que es normal al plano π de ecuación:

$$\pi: 4x - 2y + 2z + 8 = 0$$

a) Determinar el punto de intersección entre dicha recta y el plano.
b) Si T1 y T2 son las rectas de intersección del plano π con los planos coordenados XZ y YZ, respectivamente, calcular el ángulo comprendido entre T1 y T2.
c) Determinar unas ecuaciones en forma simétrica de la recta que contiene al punto A y que es simultáneamente perpendicular a las rectas mencionadas en el inciso anterior.

37. Determinar la ecuación cartesiana del plano que contiene a la recta L y que es perpendicular al plano π si:

$$L: \begin{cases} \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{2-y}{-2} = \dfrac{3z-12}{9} \end{cases}$$
$$\pi:\ 2x + 3y - 4z - 9$$

38. Sea el plano π_1 que contiene a las rectas L_1 y L_2 de ecuaciones:

$$L_1:\ \frac{-2x}{-6} = \frac{y-3}{3} = \frac{3(z-3)}{18} \qquad L_2:\ \overline{p} = (1,2,3) + t(-2,2,0)$$

Determinar:
a) La ecuación cartesiana del plano π_1.
b) La distancia entre el punto P(1,0,3) y el plano π_1.
c) Las coordenadas del punto donde se intersecan las rectas L_1 y L_2

39. Sean la recta L y el plano π, cuyas ecuaciones son:

$$L: \frac{x-2}{m} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-5}{-3} \qquad \pi: 3x - 2y + nz = 0$$

Determinar los valores de "m" y "n" que hacen a la recta y el plano perpendiculares.

40. Obtener una ecuación vectorial de la recta L_3 que interseca perpendicularmente a las rectas L_1 y L_2 de ecuaciones:

$$L_1: \quad \frac{4x-4}{4} = 2 - y = z + 1$$

$$L_2: \quad \frac{x+2}{2} = \frac{1-y}{-1} = z - 2$$

41. Obtener la ecuación cartesiana de un plano π que es perpendicular a la recta representada por la ecuación $\bar{p}$ = (2,1,3) +t(-2,2,1) y dista seis unidades del origen.

42. Sean la recta L: $\begin{cases} x = 4 \\ z = 3 \end{cases}$ y el plano $\pi : y = 5$, y sean también los puntos A(4,0,0) y B(8,6,10)

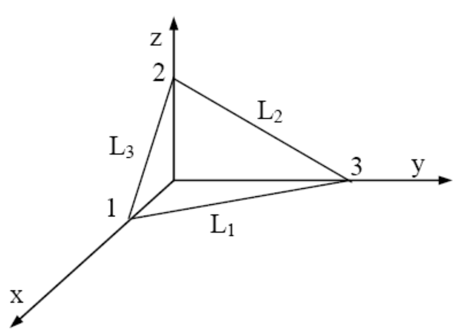
Determinar:

a) el ángulo que forman L y π,
b) si existe, la intersección de la recta L con el plano π,
c) la distancia del punto A a la recta L, y
d) la distancia del punto B al plano π.

43. Sea la recta L de ecuaciones : $\begin{cases} x - 1 = 0 \\ 2z + 6 = 0 \end{cases}$ Determinar:

a) Las coordenadas de un punto P que pertenece a la recta, tal que la distancia entre dicho punto y el plano XZ sea 8 unidades.
b) Las coordenadas del punto Q que pertenece a la recta L y que es el más próximo al punto A(3 , 4 , 1).

44. Sean los segmentos de recta L_1, L_2, L_3 que se muestran en la figura.



a) Determinar la ecuación cartesiana de un plano que es paralelo al plano que contiene a L_1, L_2, L_3, y que dista de él 7 unidades.
b) Obtener la ecuación cartesiana del plano que contiene a L_2 y es perpendicular al plano YZ.

45. Sea la recta L representada por la ecuación vectorial $\overline{p}=(t,t,t)$. Determinar las coordenadas del punto B que pertenece a dicha recta y que se encuentra más cerca del punto A $(12,\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$.

46. Sea R la recta que contiene a los puntos A(1,2,3) y B(4,8,5). Determinar la ecuación cartesiana de un plano que es perpendicular a la recta R y cuya distancia al origen de coordenadas es igual a una unidad de longitud (la solución no es única).

47. Determinar la ecuación cartesiana del plano π que está comprendido entre el punto $A(4,-6,8)$ y el origen, y que además es equidistante de dichos puntos.

48. Sea la recta L una de cuyas ecuaciones vectoriales es $\overline{p}=(2,2,-2)+(\sqrt{3}\,t,-\sqrt{3}\,t,-\sqrt{3}\,t)$. Determinar :

a) El ángulo que forma L con el plano XY.
b) El punto de intersección de L con el plano YZ.
c) Unas ecuaciones cartesianas en forma simétrica de L.

49. Determinar unas ecuaciones paramétricas de una recta L que dista 3 unidades del origen, contiene al punto A$(0,y,-4)$ y es paralela a la recta R de ecuaciones $\frac{2x-4}{6}=\frac{z}{4}\,;\; y=4$

50. Determinar las coordenadas del punto B que pertenece al plano $\pi : x-y-z+10=0$ y que es el más próximo al punto A(9,3,1).