Capitulo 6. Matrices y determinantes

Objetivo

El alumno aplicará los conceptos fundamentales de las matrices, determinantes y sus propiedades a problemas que requieran de ellos para su resolución.

Contenido

6.1 Definición de matriz y de igualdad de matrices. Operaciones con matrices y sus propiedades: adición, sustracción, multiplicación por un escalar y multiplicación. Matriz identidad.

6.2 Definición y propiedades de la inversa de una matriz. Cálculo de inversa por transformaciones elementales.

6.3 Ecuaciones matriciales y su resolución. Representación y resolución matricial de los sistemas de ecuaciones lineales.

6.4 Matrices triangulares, diagonales y sus propiedades. Definición de traza de una matriz y sus propiedades.

6.5 Transposición de una matriz y sus propiedades. Matrices simétricas, antisimétricas y ortogonales. Conjugación de una matriz y sus propiedades. Matrices hermitianas, antihermitianas y unitarias. Potencia de una matriz y sus propiedades.

6.6 Definición de determinante de una matriz y sus propiedades. Cálculo de determinantes: Regla de Sarrus, desarrollo por cofactores y método de condensación. Cálculo de la inversa por medio de la adjunta. Regla de Cramer para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales de orden superior a tres.

6.1.1. Definición de matriz.

Matriz: Arreglo rectangular de entes matemáticos (polinomios, funciones, etc.) que usualmente son números.

Definición: Una matriz de m x n con elementos en C es un arreglo de la forma:

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

donde $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn} \in \mathrm{C}$ y m, n ∈ Z.

En forma abreviada, M= $[a_{ij}]$ con i= 1, ..., m; j= 1, ..., n.

Ej.

$$A = \begin{bmatrix} 2+\sqrt{3}\mathrm{i} & 0 \\ -8 & \pi \\ 4 & \mathrm{i} \end{bmatrix}_{3x2} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{1x3} \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}_{3x1} \quad D = \begin{bmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{bmatrix}$$

6.1.2. Igualdad de matrices

Definición: Sean A= [a_{ij}] y B= [b_{ij}] dos matrices de orden m x n con elementos en C. A y B son iguales si: $a_{ij} = b_{ij}$; con i= 1, ..., m; j= 1, ..., n.

6.1.3. Operaciones con matrices

Adición de matrices.
Si A= $[a_{ij}]_{mxn}$ y B= $[b_{ij}]_{mxn}$ entonces A+B=S= $[s_{ij}]_{mxn}$ donde $s_{ij}= a_{ij} + b_{ij}$ para i= 1, ..., m; j= 1, ..., n.
Ej.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 0 & 1+i \\ -2i & 4 \end{bmatrix}_{3x2} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -i \\ 3 & -4 \end{bmatrix}_{3x2} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2i \\ 7+i & 0 & 3 \end{bmatrix}_{2x3}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \\ 3-2i & 0 \end{bmatrix}_{3x2}$$

A + C y B + C no se pueden efectuar ∴ NO son conformables para la adición de matrices.

Propiedades de la adición de matrices.

i) A + (B+C) = (A+B) + C	Asociatividad
ii) A + B = B + A	Conmutatividad
iii) A+ 0 = A (Matriz nula del mismo orden)	Elemento idéntico
iv) A + (-A) =0	Elemento inverso

Sustracción de matrices.
Si A= $[a_{ij}]_{mxn}$ y B= $[b_{ij}]_{mxn}$ entonces A - B se define como A + (-B).

Multiplicación por un escalar.
Sea A= $[a_{ij}]_{mxn}$ y $\alpha \in C$. El producto αA es una matriz de m x n definida por: $\alpha A = \alpha a_{ij}$

Teorema:
Si A y B son dos matrices de m x n con elementos en C y $\alpha, \beta \in C$, entonces:
i) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
ii) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
iii) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$

Multiplicación de matrices.
Si A= $[a_{ij}]_{mxn}$ y B= $[b_{ij}]_{nxq}$ entonces AB= $[p_{ij}]_{mxq}$ donde:

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad \text{para i} = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, q.$$

Ej.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}_{4x3} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}_{3x2} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -4 \end{bmatrix}_{2x4}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 0 & -5 \\ -5 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}_{4x2} \; ; \; BC = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 & 6 \\ 3 & -18 & 4 & -25 \\ 1 & -11 & 3 & -15 \end{bmatrix}_{3x4} \; ; \; CA = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 4 \\ -6 & 1 & -2 \end{bmatrix}_{2x3}$$

AC, BA, CB son NO CONFORMABLES para la multiplicación de matrices.
$\mathrm{AC} \neq \mathrm{CA}, \mathrm{AB} \neq \mathrm{BA}$ y $\mathrm{BC} \neq \mathrm{CB}, \therefore$ la multiplicación de matrices NO siempre es conmutativa.

Ej. Demostrar que las matrices A, B y C son conmutables para la multiplicación.

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \mathrm{C} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{AB} = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; \; \mathrm{BA} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 12 & -7 \end{bmatrix}; \; \mathrm{AC} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}; \; \mathrm{CA} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}$$

A y B NO son permutables (conmutables), A y C SI son permutables.

Teorema. Sean A, B y C matrices de m x n, n x p y p x q respectivamente, cuyos elementos son números complejos, entonces: A(BC) = (AB)C.
Se cumple la ASOCIATIVIDAD en la multiplicación de matrices.

Ej. Demostrar que las matrices A, B y C cumplen con la asociatividad para la multiplicación.

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \mathrm{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \mathrm{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Primera forma A(BC):} \quad \mathrm{BC} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{ABC} = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ -10 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Segunda forma (AB)C:} \quad \mathrm{AB} = \begin{bmatrix} -5 & -2 & 1 \\ -11 & -4 & 3 \end{bmatrix}, \mathrm{ABC} = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ -10 & -2 \end{bmatrix}$$

Teorema. Sean A, B y C matrices de m x n, n x p y p x q respectivamente, y D, E, F, matrices de m x n, m x n y n x p respectivamente, cuyos elementos son números complejos, entonces:
i) A(B+C) = AB + AC
ii) (D+E)F = DF + EF

6.1.4. Matriz identidad

Se conoce como "matriz identidad" de orden n a una matriz cuadrada de n x n de la forma:

$$\mathrm{I_n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Definición. Se llama matriz identidad de orden n, a la matriz cuadrada de orden n, $I_n=[d_{ij}]$, tal que:

$$\delta_{ij} = 1, \qquad si\ i = j$$
$$\delta_{ij} = 0, \qquad si\ i \neq j$$

La matriz identidad constituye el elemento idéntico en la multiplicación de matrices.
Teorema. Si A es una matriz con elementos en C, entonces:
i) $I_m A = A$
ii) $AI_n = A$

6.2. Inversa de una matriz

Definición. Sea A una matriz de n x n con elementos en C. Una matriz X se dice que es inversa de A si:

$$XA = I_n = AX$$

y se representa con A^{-1}.

Nota:
1. Para que una matriz A tenga inversa, es condición necesaria que sea cuadrada. A^{-1} deberá ser cuadrada y del mismo orden que A.
2. NO todas las matrices cuadradas tienen inversa (detA=0).

3. $\text{Matriz} \begin{cases} \text{Singular } (\nexists\, A^{-1}) \\ \text{No singular } (\exists\, A^{-1}) \end{cases}$

4. Si existe la inversa de una matriz cuadrada, ésta es única (unicidad).

Teorema: Si A y B son dos matrices no singulares del mismo orden y $\lambda \in C$, entonces:
i) A^{-1} es única
ii) $(A^{-1})^{-1} = A$
iii) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
iv) $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}, si\ \lambda \neq 0$

Cálculo de la inversa por transformaciones elementales.

$$[A|I_n] \to T_1 \dots \to T_k \to \left[I_n|A^{-1}\right]$$

Transformaciones elementales

a) Intercambiar dos renglones.
b) Multiplicar un renglón por un escalar diferente de cero.
c) Multiplicar un renglón por un escalar diferente de cero y sumarlo a otro renglón, reemplazando este último por el resultado obtenido.

Ej 1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix};\ A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -17 \\ 3 & -1 & 9 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Ej 2. $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \\ -1 & -4 & 2 \end{bmatrix};\ B^{-1} = \begin{bmatrix} 16 & -6 & 3 \\ -5 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Ej 3. $C = \begin{bmatrix} i & -1 & 2 \\ 0 & 2-i & 1+3i \\ 0 & 1 & i \end{bmatrix};\ C^{-1} = \begin{bmatrix} -i & 2+i & -5-i \\ 0 & -1 & 3-i \\ 0 & -i & 1+2i \end{bmatrix}$

6.3. Ecuaciones matriciales

Ej 1. AX+B = 3X
Solución:
$AX + B = 3X;\ 3X - AX = B; (3I - A)X = B; \mathbf{X} = (\mathbf{3I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$
$X = \begin{bmatrix} 8 & 6 & -3 \\ -5 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

Ej 2. Dadas las matrices:
$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$
Resolver la ecuación: AX = B
$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{17} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-11} \end{bmatrix}$

Ej 3. Dadas las matrices:
$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
Resolver la ecuación: XA + B = C
$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{-3} \end{bmatrix}$

Ej 4. Siendo:
$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$
Calcular el valor de X en las siguientes ecuaciones:
1. XA= B+I
$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{9} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$
2. AX+B= C
$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{-4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-1} \end{bmatrix}$
3. XA+B= 2C
$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{-9} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-11} & \mathbf{4} \end{bmatrix}$
4. AX+BX= C
$\mathbf{X} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{7}}\begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$
5. XAB - XC = 2C
$\mathbf{X} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\begin{bmatrix} \mathbf{-14} & \mathbf{4} \\ \mathbf{-23} & \mathbf{6} \end{bmatrix}$

Ej 5. Siendo:
$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Resolver la ecuación matricial:
A X + 2 B = 3 C

$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-2} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-5} & \mathbf{5} & \mathbf{2} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-3} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$

Ej 6. Resolver en forma matricial el sistema:

x + y + z = 6
x + 2y + 5z = 12
x + 4y + 25z = 36

X= 3, Y= 2, Z= 1

6.3.1. Representación matricial de un sistema de ecuaciones lineales

Ecuación matricial: AX = B, donde:
A- Matriz de coeficientes
X- Vector de incógnitas
B- Vector de términos independientes.

Ej. Resolver el siguiente sistema a través de álgebra matricial.
x + 3z = 2
y - 2z = -1
x + y + 2z = 3

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \mathrm{X} = \begin{bmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \\ \mathrm{z} \end{bmatrix}; \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}; \text{Solución: } \mathrm{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -3 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \mathrm{X} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

6.4. Tipos especiales de matrices cuadradas

Regiones de una matriz cuadrada.

$$M = \begin{bmatrix} \mathrm{a}_{11} & \mathrm{a}_{12} & \cdots & \mathrm{a}_{1\mathrm{n}} \\ \mathrm{a}_{21} & \mathrm{a}_{22} & \cdots & \mathrm{a}_{2\mathrm{n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathrm{a}_{\mathrm{n}1} & \mathrm{a}_{\mathrm{n}2} & \cdots & \mathrm{a}_{\mathrm{nn}} \end{bmatrix}$$

Triángulo superior

Triángulo inferior

Diagonal principal

Traza de una matriz
Definición: Sea A=[a_{ij}] una matriz de n x n con elementos en C. Se llama traza de A y se representa con Tr(A), al número:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Teorema: Si A y B son dos matrices de n x n con elementos en C y $\alpha \in C$.
i) tr(A+B) = tr(A) + tr(B)
ii) tr(αA) = α tr(A)
iii) tr(AB) = tr(BA)

Matrices triangulares

Definición: Sea $A=[a_{ij}]$ una matriz de n x n con elementos en C. Se dice que:
i) A es triangular superior si $a_{ij} = 0$ para $i > j$.
ii) A es triangular inferior si $a_{ij} = 0$ para $i < j$.

Teorema: Si A y B son dos matrices triangulares superiores (inferiores) del mismo orden y $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces:
i) A+B es triangular superior (inferior)
ii) αA es triangular superior (inferior)
iii) AB es triangular superior (inferior)

Se cumple la propiedad de cerradura para este tipo de matrices.

Matriz diagonal

Los elementos fuera de la diagonal son nulos y distintos entre si.
Definición: Sea $A=[a_{ij}]$ una matriz de n x n con elementos en C. Se dice que A es una matriz diagonal si $a_{ij}= 0$ para $i \neq j$, y se representa como:

$$\text{diag}\,(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$$

Teorema: Si A y B son dos matrices diagonales tales que A= diag $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ y B= diag $(b_{11}, b_{22}, \ldots, b_{nn})$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces:

i) $A+B = \text{diag}\,(a_{11}+ b_{11}, a_{22}+ b_{22}, \ldots, a_{nn}+ b_{nn})$
ii) $\alpha A = \text{diag}\,(\alpha a_{11}, \alpha a_{22}, \ldots, \alpha a_{nn})$
iii) $AB = \text{diag}\,(a_{11}b_{11}, a_{22}b_{22}, \ldots, a_{nn}b_{nn})$
iv) $A^{-1} = \text{diag}\,(1/a_{11}, 1/a_{22}, \ldots, 1/a_{nn})$, si A es no singular.

Matriz escalar

Los elementos fuera de la diagonal son nulos e iguales entre si, pero diferentes de la unidad.

$$M = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha \end{bmatrix} = \alpha I_n$$

Operaciones sobre una matriz

1. Transposición: $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}^{\mathbf{T}}$
Si $A = A^T \rightarrow$ se tiene una matriz simétrica
Si $A = -A^T \rightarrow$ se tiene una matriz antisimétrica

2. Conjugación: $\mathbf{A} \rightarrow \bar{\mathbf{A}}$
Si $A = \bar{\mathbf{A}} \rightarrow$ se tiene una matriz real
Si $A = -\bar{\mathbf{A}} \rightarrow$ se tiene una matriz imaginaria

3. Conjugación - Transposición: $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}^*$
Si $A = A^* \rightarrow$ se tiene una matriz hermitiana
Si $A = -A^* \rightarrow$ se tiene una matriz antihermitiana

4. Potencia enésima: $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}^{\mathbf{n}}$
Idempotente
Involutoria
Nilpotente
Periodica

1. Transposición: $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}^{\mathbf{T}}$
Los renglones de A^T son las columnas de A y las columnas de A^T son los renglones de A.

Definición: Sea A=[a_{ij}] una matriz de m x n con elementos en C. Se llama transpuesta de A a la matriz de n x m:

$$\mathbf{A}^{\mathbf{T}} = [\mathbf{C}_{\mathbf{ij}}], \qquad \text{tal que } C_{ij} = a_{ij}$$

Ej.

$$A = \begin{bmatrix} 2i & 0 & -i \\ 5 & 1 & 1-3i \end{bmatrix}, \qquad A^T = \begin{bmatrix} 2i & 5 \\ 0 & 1 \\ -i & 1-3i \end{bmatrix}$$

Propiedades de la transposición
Teorema: Si A y B son dos matrices con elementos en C y $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces:
i) $\left(A^T\right)^T = A$
ii) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
iii) $(A + B)^T = A^T + B^T$ si $\exists\, A + B$
iv) $(AB)^T = B^T A^T$ si $\exists\, AB$

Matrices simétricas y antisimétricas (matrices cuadradas)
Definición: Sea A una matriz de n x n con elementos en C, se dice que:
i) A es simétrica si $A^T = A$
ii) A es antisimétrica si $A^T = -A$

Ej. Matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2-i \\ 5 & 3i & -i \\ 2-i & -i & 0 \end{bmatrix}; \quad A = A^T; \quad a_{ij} = a_{ji} \ \forall\, i, j$$

Ej. Matriz antisimétrica

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -5 & -2+i \\ 5 & 0 & i \\ 2-i & -i & 0 \end{bmatrix}; \;\; B = -B^T; \;\; b_{ij} = -b_{ji} \; \forall \, i \neq j; \text{Si } i = j, b_{ii} = 0$$

Propiedades de las matrices simétrica y antisimétrica.

Teorema: Si A y B son dos matrices simétricas (antisimétricas) de n x n y $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces:

i) A+B es simétrica (antisimétrica)

ii) αA es simétrica (antisimétrica)

Teorema: Si A es una matriz de n x n con elementos en $\mathbb{C}$, entonces:

i) $A + A^T$ es simétrica

ii) $A - A^T$ es antisimétrica

2. Conjugación: $\mathbf{A} \rightarrow \overline{\mathbf{A}}$

Definición: Sea A=[a_{ij}] una matriz de m x n con elementos en C. Se llama conjugada de A a la matriz de m x n $\overline{A} = [c_{ij}]$ tal que $c_{ij} = \overline{a_{ij}}$.

Ej.

$$A = \begin{bmatrix} 2i & 0 & -i \\ 5 & 1 & 1-3i \end{bmatrix}, \;\; \overline{A} = \begin{bmatrix} -2i & 0 & i \\ 5 & 1 & 1+3i \end{bmatrix}$$

Teorema: Si A y B son dos matrices con elementos en C y $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces:

i) $\overline{(\overline{A})} = A$

ii) $\overline{\alpha A} = \overline{\alpha}\,\overline{A}$

iii) $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$ si $\exists \; A+B$

iv) $\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$ si $\exists \; AB$

Matrices reales e imaginarias.

Definición: Sea A una matriz de m x n con elementos en C, se dice que:

i) A es real si $\overline{A} = A$

ii) A es imaginaria si $\overline{A} = -A$

Teorema: Si A es una matriz de m x n con elementos en $\mathbb{C}$, entonces:

i) $A + \overline{A}$ es real

ii) $A - \overline{A}$ es imaginaria

3. Conjugación - Transposición: $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}^*$

La conjugación transposición de una matriz A, se representa con A^* y está definida como:

$$A^* = (\overline{A})^T = \overline{(A^T)}$$

Propiedades de la conjugación transposición

Teorema: Si A y B son dos matrices con elementos en C y $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces:

i) $(A^*)^* = A$

ii) $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$

iii) $(A+B)^* = A^* + B^*$ si $\exists\, A+B$

iv) $(AB)^* = B^* A^*$ si $\exists\, AB$

Matrices hermitianas y antihermitianas (matrices cuadradas)

Definición: Sea A una matriz de n x n con elementos en C, se dice que:

i) A es hermitiana si $A^* = A$

ii) A es antihermitiana si $A^* = -A$

Ej. Matriz hermitiana

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2+i \\ 5 & 3 & i \\ 2-i & -i & 0 \end{bmatrix};\ a_{ij} = \overline{a_{ji}}\ \forall\, i,j;\ I(a_{ii}) = 0,\ \text{Diagonal principal: } R$$

Ej. Matriz antihermitiana

$$B = \begin{bmatrix} -i & -5 & -2-i \\ 5 & 3i & -i \\ 2-i & -i & 0 \end{bmatrix};\ b_{ij} = -\overline{b_{ji}}\ \forall\, i,j;\ R(a_{ii}) = 0,\ \text{Diagonal principal: } I$$

Teorema: Si A es una matriz de m x n con elementos en $\mathbb{C}$, entonces:

i) AA^* es hermitiana

ii) A^*A es hermitiana

iii) $A + A^*$ es hermitiana (nxn)

iv) $A - A^*$ es antihermitiana (nxn)

Potencia enésima

Teorema: Sea A una matriz de n x n con elementos en C y $m, n \in \mathbb{N}$, entonces:

i) $A^m A^n = A^{m+n}$

ii) $(A^m)^n = A^{mn}$

Una matriz A no singular se dice que:

i) Es ortogonal si: $A^T = A^{-1}$

ii) Es unitaria si: $A^* = A^{-1}$

Matriz idempotente: Una matriz de n x n es idempotente si se verifica que $A^2 = A$. Esto implica que $A^n = A\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. La matriz debe ser simétrica para ser idempotente, no todas las matrices simétricas son idempotentes.

Ej.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix};\ A^2 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Matriz involutoria: Una matriz de n x n es involutoria si se verifica que $A^2 = I_n$.
Ej.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\ A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz nilpotente: Una matriz de n x n es nilpotente si se verifica que $A^2 = 0\ (\text{matriz nula})$. Esto implica que $A^n = 0\ \forall\ n\ \in \mathbb{N}$.
Ej.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};\ A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix};\ A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz periódica: Una matriz cuadrada A es periódica si existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $A^{p+1} = A$. Además si p es el menor número natural que cumple $A^{p+1} = A$ se dice que A es periódica con periodo p.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\ A^3 = A^2A\ ;\ A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\ ;\ A^3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinantes
El concepto de determinante surge antes que el concepto de matriz, en 1750 los trabajos de Cramer orientados a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, dan como resultado el concepto de determinante.

Nota:
1. La matriz es un arreglo de números.
2. El determinante es un número.

Propiedades de un determinante

Teorema: Sea $A=[a_{ij}]$ una matriz de n x n con elementos en C:

1) Si los elementos de una línea de A (renglón o columna) son todos nulos, entonces det A= 0.
2) Si B se obtiene de A multiplicando los elementos de una de sus líneas por un número $\lambda \in \mathbb{C}$ entonces det B = λ det A.
3) Si B se obtiene de A intercambiando 2 líneas paralelas (renglones o columnas), entonces det B = -det A.
4) Si dos líneas paralelas de A son proporcionales, entonces det A = 0.
5) Si B se obtiene de A sumando a los elementos de una línea, los elementos de una línea paralela multiplicados por un número $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces det B = det A.

Teorema: Si $A=[a_{ij}]$ y $B=[b_{ij}]$ son dos matrices de n x n con elementos en C, entonces:
i) $\det A = \det A^T$
ii) $\det \lambda A = \lambda^n \det A$
iii) $\det AB = \det A \det B$

Cálculo de determinantes

Regla de Sarrus

Éste método se emplea únicamente para calcular determinantes de segundo y tercer orden.

Segundo orden:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Tercer orden:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Ej. Determinar el valor de det A y det B.

$$A = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} \; ; \; \det A = -7 \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -4 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} ; \; \det B = -5$$

Regla de Cramer para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Para encontrar los valores de las incógnitas de sistemas de ecuaciones lineales de orden 2 y 3, se requiere un cociente de determinantes.
El numerador es el determinante que resulta al remplazar en la matriz de coeficientes, la columna de la incógnita por el vector de términos independientes.
El denominador es el determinante asociado a la matriz de coeficientes.

Ej. Resolver a través de la regla de Cramer los siguientes sistemas.

a) 5X+3Y = 5
4X+7Y = 27 detA = 23 ; **X=-2, Y=5**

b)

$$\frac{X+1}{5} = \frac{Y-2}{7}$$

$$\frac{X+4}{3} - \frac{Y-9}{6} = \frac{8}{3}$$

det A = 3 ; **X = 4, Y = 9**

c) 2X+3Y+4Z = 260
X+4Y+8Z = 330
4X+8Y+6Z = 510 det A = -34 ; **X = 50, Y = 20, Z = 25**

Desarrollo por cofactores

Aplicable al cálculo de determinantes de cualquier orden y es el fundamento de todos los métodos de aplicación práctica.

Definición: Sea A=[a_{ij}] una matriz de n x n con elementos en C.
i) Se llama "menor" (Mij) del elemento aij, al determinante de la matriz que se obtiene suprimiendo en A al renglón ' i ' y a la columna ' j '.
ii) Se llama cofactor (Cij) del elemento aij, al producto:

$$\mathbf{C_{ij}} = (-\mathbf{1})^{\mathbf{i+j}}\,\mathbf{M_{ij}}$$

Definición: Sea A=[a_{ij}] una matriz de mxn con elementos en C y $r \in \mathbb{Z}$, tal que $1 \leq r \leq n$, entonces:

i) $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{rj}\, c_{rj}$
ii) $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ir}\, c_{ir}$

Ej. Calcular el determinante de la matriz A, utilizando el método por cofactores.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 & 2 \\ 4 & -6 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & -7 & 1 \end{bmatrix}$$

det A = $\mathbf{2C_{32} - C_{33}}$ = 27

Cálculo de la inversa por medio de la matriz adjunta

Definición: Sea A=[a_{ij}] una matriz de n x n con elementos en C y sea Cij el cofactor del elemento aij. Se llama matriz adjunta de A, a la matriz:

Adj A = [bij], donde bij = Cji

Ej. Obtener la adjunta de la matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Adj A} = C_{ji} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 8 & -4 & 2 \\ 5 & -1 & -1 \end{bmatrix}\ ;\ \ A\ \text{Adj}\ A = 6I_3\ ;\ \det A = 6\ ;\ \ \therefore A\ \text{AdjA} = (\det A)I_n$$

Teorema: Si A es una matriz de nxn con elementos en C, entonces:

A(Adj A)=(Adj A)A = (det A) In

Teorema: A^{-1} existe si y solo si $\det A \neq 0$.

$$A(\text{Adj A}) = (\det A)I_n;\ \ I_n = \frac{1}{\det A}(A(\text{Adj A}))\ ;\ \ \mathbf{A^{-1}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{det\,A}}\mathbf{Adj\ A}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\ \ \therefore\ A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 8 & -4 & 2 \\ 5 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$